Inverse Problems in Science and Engineering

Taylor & Francis
Taylor & Francis Group

Projected Barzilai–Borwein method for large-scale nonnegative image restoration

(Received 26 June 2005; Revised 9 March 2006; in final form 16 June 2006)

Keywords:

1. Introduction

$N \times N$

$$k(x\ y) \star f(x\ y) = h(x\ y) + n(x\ y) := h_\delta(x\ y) \qquad (\ .\ )$$

$h(x\ y)$ … $h_\delta(x\ y)$ … $f(x\ y)$ … $k(x\ y)$ … $\star$ … x … y … $n(x\ y)$ …

$$\int\int_{\mathbb{R}} k(x-\xi\ \ y-\eta) f(\xi\ \eta)\ \ \xi\ \ \eta = h_\delta(x\ y). \qquad (\ .\ )$$

f … h_δ … k …

$$\mathcal{K} f = h + n := h_\delta \qquad (\ .\ )$$

$\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{N\ \times N}$ f h n $h_\delta \in \mathbb{R}^{N}$ … n … $\mathcal{K}$ … f … f …

$$\Psi(f) := \ \ -\|\mathcal{K} f - h_\delta\|\ , \qquad (\ .4)$$
$$\text{. .} \quad f \geq \ \ .$$

… (.4) … (.4) …

$$\Psi(f) := \ \ - f^T A f - h_\delta^T \mathcal{K} f \qquad (\ .\ )$$
$$\text{. .} \quad f \geq$$

e e $A := \mathcal{K}^T\mathcal{K}$ e e e e e e e e q e e e e e e e ee e e

e e e e e e

e e

$$q(x) \qquad (.)$$

e e $q : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ e e e q m e

$$q(x) := -x^T A x - b^T x \qquad (.)$$

e e $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e e e e e x_k e e k e e g_k e e q x_k e

$$g_k = Ax_k - b. \qquad (.)$$

e e ( ) e e e

$$x_{k+} = x_k - \alpha_k g_k \qquad (.)$$

e e α_k e e e e e e e e e e e e ee e e e ( ) e e e e α_k e $q(x)$ e e e $x_k - \alpha g_k$

$$\alpha_k = \frac{g_k^T g_k}{g_k^T A g_k}. \qquad (.)$$

e e e ' e e e e e e α_k

$$\alpha_k = \frac{g_{k-}^T g_{k-}}{g_{k-}^T A g_{k-}} \qquad (.)$$

$$\alpha_k' = \frac{g_{k-}^T g_{k-}}{g_{k-}^T A g_{k-}} \qquad (.)$$

e e e e q e eq ( ) e

$$y_k = A s_k \qquad (.)$$

e e $y_k = g_{k+} - g_k$ $s_k = x_{k+} - x_k$ e A $\alpha^{-} I$ (α)

$$\|y_{k-} - \alpha^{-} I s_{k-}\|$$

$$\alpha_k = \frac{s_{k-}^T s_{k-}}{s_{k-}^T y_{k-}}. \qquad (. 4)$$

αI A α_k

$$\|\alpha I y_{k-} - s_{k-}\|$$

$$\alpha_k = \frac{s_{k-}^T y_{k-}}{y_{k-}^T y_{k-}}. \qquad (.)$$

$s_{k-} = -\alpha_{k-} g_{k-}$ $y_{k-} = A s_{k-}$ eq ( ) ( ) $f \geq$ ( ) (4) 4 4 ( )

2. Summary of discrete ill-posedness and regularization for image restoration

( ) $\mathcal{K}$ h_δ h_δ q O eq ( )

$$\hat{k}(\omega_i\ \omega_j)\,\hat{f}(\omega_i\ \omega_j) = \hat{h}(\omega_i\ \omega_j) + \hat{n}(\omega_i\ \omega_j) := \hat{h}_\delta(\omega_i\ \omega_j) \qquad (.)$$

e e $\hat{k}(\omega_i\ \omega_j)$ e e (O) eq e e ω_i ω_j $\hat{h}$ $\hat{f}$ $\hat{n}$ e e e e h f n e O e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e $\hat{f}(\omega_i\ \omega_j)$

$$\hat{f}(\omega_i\ \omega_j) = R(\omega_i\ \omega_j)\hat{h}_\delta(\omega_i\ \omega_j). \qquad (\ .\ )$$

e e e e e e e e e e e O $R(\omega_i\ \omega_j) = \hat{k}(\omega_i\ \omega_j)^-$ e e e e e e $\hat{k}(\omega_i\ \omega_j)$ e e eq e e e e e e e e e e e e e

$$R^{\ e\ e}(\omega_i\ \omega_j) = \frac{\hat{k}^*(\omega_i\ \omega_j)}{|\hat{k}(\omega_i\ \omega_j)|\ +\ /} \qquad (\ .\ )$$

e e e e e e e e e e e e e e e e e e

$$R\ (\omega_i\ \omega_j) = \frac{\hat{k}^*(\omega_i\ \omega_j)}{|\hat{k}(\omega i\ \omega_j)|\ + \alpha S(\omega_i\ \omega_j)} \qquad (\ .4)$$

e e $S(\omega_i\ \omega_j)$ e e e e e e e e e e e e e e e e e e $\omega_i\ \omega_j \neq$ e e e e e e ω_i ω_j $\hat{k}^*(\omega_i\ \omega_j)/(|\hat{k}(\omega_i\ \omega_j)|\ + \alpha S(\omega_i\ \omega_j)) \in l\ (-\infty\ \infty)$ e e α e e e e $S(\omega_i\ \omega_j)$ e $+ (\omega_i + \omega_j)$ $\omega_i^{\,p} + \omega_j^{\,q}$ e e p q e e

e e eq e e e e e e e eq e e O q

e e e e e e e e e e e e e e e e e e e

$$\|\mathcal{K}f - h_\delta\|\ + \alpha\Gamma(f) \qquad (\ .\ )$$

e e $\Gamma(f)$ e e e f e e e $\Gamma(\cdot)$ e e e e $\Gamma(f)$ $\|f\|_L$ e e (Lf f) e e L e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e 4 e e e ( ) e e e e e $\Gamma(f)$

[illegible] $\Gamma(f) = \int |\nabla f|$ [illegible] ∇f [illegible] f [illegible] $|\cdot|$ [illegible] α [illegible] α [illegible] α [illegible] $\mathcal{K}$ [illegible] h_δ [illegible] α [illegible] Q + [illegible] O [illegible] α [illegible] α [illegible] et al. [illegible] et al. [illegible] et al. [illegible]

3. Image restoration with nonnegative constraints

[illegible] $f \geq$ [illegible] $\mathcal{K}f$ [illegible] $\mathcal{K}$ [illegible] (z) [illegible] $f = e$ (z) [illegible] $f_i = e$ (z_i) [illegible] Ψ [illegible] z

$$_z\Psi(f) = F \quad {}_f\Psi(f) = F\mathcal{K}^T(\mathcal{K}f - h_\delta) \qquad (.)$$

[illegible] $F =$ (f) [illegible]

$$f_k = f_{k-} + \alpha_k d_k \qquad (.)$$

e e $d_k = -F_k\mathcal{K}^T(\mathcal{K}f_k - h_\delta)$ e e e e e e e -

e e e e f_k e e e e e α_k e

e e $\{\alpha:$ f_{k-} $+\,\alpha d_{k-}$ $\geq$ $\}$ (-) g_k e e

d_{k-} -

e et al - e (-) e e

e

$$\Phi(f) := - \|\mathcal{K}f - h_\delta\| + \frac{\alpha}{-}\|f\|$$

e e e e

$$
\begin{aligned}
&- \|\mathcal{K}f - h_{\delta}\| \\
.\ .\quad &\|f\| \le \Delta \qquad\qquad (\ . \ ) \\
&f \ge \ .
\end{aligned}
$$

e e e eq e e e e e
e e q e e e e e e e e e e e
e e e e e e
e e e e e e e e q e
e e e e ee e e e
e e e e e e e e e
O e e e e e e e e e e e e
e e ee e e e e e e e e α
ee e e e e e e e e
e e e e e e
e e e e e q e
e e e e e e e
e e e e e α ee e e e
e e e q e e 4 e e
e e e e e e e e e

e e $P_{\Omega}(\cdot)$

e e e e e x_k e e e e e e e

$$x_{k+} = P_\Omega(x_k - \alpha_k g_k)$$

e e $g_k := g(x_k) = Ax_k - b$ e e e α_k e e e e e e e e e e e ( ) ( ) e e e ( ) e e e e e e e e e e e e e e e e e (4) ( ) e e e e e e e e q

Remark 1 e ( ) e e ( ) e e e e e A A e A e e e e e e e ( ) e e e e ( ) e e e e e ( ) e ( ) e e e e e e e e e e eq (4) e eq e q

$$\mathcal{M}(f) := -f^T \mathcal{K}^{\mathcal{T}} \mathcal{K} f - h_\delta^{\mathcal{T}} \mathcal{K} f \qquad (4.\ )$$

$$\text{. . } \quad f \geq \ .$$

e e $H := \mathcal{K}^T\mathcal{K}$ e e $g := \mathcal{K}^T\mathcal{K}f - \mathcal{K}^T h_\delta$ e e e e e e e e e e e e eq e e $\mathcal{M}(f_k)$ e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e $d_k = P_\Omega(f_k - \alpha_k g_k) - f_k$ e e e β ( )

$$\mathcal{M}(f_k) - \mathcal{M}(f_k + \beta d_k) \geq -\beta\lambda\ d_k^T g_k \qquad (4.\ )$$

$$d_k^T g(f_k + \beta d_k) \geq \lambda\ d_k^T g_k \qquad (4.\ )$$

e e $\lambda \ \leq \lambda$ e e e e ( ) e e e 4 e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e 4 (e q e e) e $\mathcal{M}_e$ e e e e e e e e e e e e e k e

$$\mathcal{M}_e = {}_i\ \mathcal{M}(f_i) \qquad \leq i \leq k. \qquad (4.\ )$$

e e e e $\mathcal{M}_c$ e e e e e e e e e e $\mathcal{M}_e$ e e e e e e $\mathcal{M}_r$

$$\mathcal{M}_r - \mathcal{M}(f_k + \beta d_k) \geq -\beta\gamma\ d_k^T g_k. \qquad (4.\ )$$

e e e e e e e e $\mathcal{M}_r$ e e e e e
e e e e e e L $\mathcal{M}_r$ e e e e
e e e e e $\mathcal{M}(f)$ L e e e e
e e eq e e e e $\mathcal{M}$ e e
e e $\mathcal{M}_r = \infty$ e $\mathcal{M}_r$ $f_k \geq f$ e e e
e e e e e e k e $\leq$ L e e
e $\mathcal{M}_r$ e e O e e e e e ee L e e $\mathcal{M}_r$
$\mathcal{M}_c$ ee e e e $\mathcal{M}_r := \mathcal{M}_c$ $\mathcal{M}_c := \mathcal{M}(f_k)$
e e e e e e e e e e
e e e e e e e e e e e
(e e e 4) e e

$$\|\tilde{g}_k\| \leq \varepsilon \|g\| \qquad (4.\ )$$

e e ε e e e e $\tilde{g}_k$ e e

$$(\tilde{g}_k)_i = \begin{cases} (g_k)_i & (f_k)_i > \\ \{(g_k)_i \quad \} & (f_k)_i = \ . \end{cases}$$

Remark 2 e e e e e e e e k e e e e
e e e e e e e e e e e e e
e e e e e e e e
e e e e k e e e e ε e
e e e $\varepsilon = \ ^{-}$ e e e (e e)
$\varepsilon = \ ^{-}$ e e e (e e e) e e
e e ee e e ε e e e e
e e e e e e
e e e e O e e e ε e e
e e e e e e e e e e e e e
e e ε e ee $^{-}$ $^{-}$
e e e e e e e e

Algorithm 1 (e e e)

e e f $\geq$ L = e k :=
e (4) e e e e $d_k = -g(f_k)$
e k = e e e α_k e e e e
e e e α_k ( )
e 4 e $f_{k+} = P_{\Omega\geq}\,(f_k + \alpha_k d_k)$
e e e e e e e e e e e e
e e e e q e e k := k + e

5. Remarks on the convergence and regularizing properties

e x_k e e eq e e e e e e e e x x
e e e e e $q(x)$ x_k $g_k = Ax_k - b$ e e

k ≥

$$g_{k+} = \frac{}{\alpha_k}(\alpha_k I - A)g_k. \qquad (.)$$

e e e e e e e e e e

e e A

e e e (λ_i) e e e e e e e e

m e e e e e e e e $g_k^{(i)} =$ e

m − e e g_k ( ) ( )

$A =$ (λ_i)

$$g_{k+}^{(i)} = \frac{}{\alpha_k}(\alpha_k - \lambda_i)g_k^{(i)}. \qquad (.)$$

e e e e e e e e e

R e e e e e e e e e e e α_k

e e e e e e

e e e e q e

e e e $x_{k+} - x_k \in$ {g Ag A g . . . A^{k-} g g

e e e e e e e e e $A := \mathcal{K}^T\mathcal{K}$
e e e e e e e e e e
e e e e e e e e e e e
e e e e e e e e q e
e e e e e e e e e e e
e e e e e e e e e e e e
e e e e e e e e
e eq e e e e ee e e
e e e e e e
e
e e e e e e e e
e e e e e e e e e
e e e e e e e e e
e e e e e e e e e e
we set a maximum iteration number k , if the iterative index k exceeds k the iteration of Algorithm 1 should be stopped e e k
e e e e e e e e e e
e

6. Matrix-vector multiplication

e e e e e ( ) e e e
e e e e e

$$k(x-\xi \;\; y-\eta) = k_x(x-\xi)k_y(y-\eta). \qquad (\; . \;)$$

e e e e e e e
e e e e
e e e e k_x k_y e $\mathcal{K}_x$ $\mathcal{K}_y$ e e e
e e $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}_x$ $\mathcal{K}_y$ e e e e $\mathcal{K}_x$ $\mathcal{K}_y$

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_x \otimes \mathcal{K}_y. \qquad (\; . \;)$$

e (·)” e e e e e e
e $U \in \mathbb{R}^{m_x \times m_y}$ e e $U \in \mathbb{C}^{m_x m_y}$
e U e e e e $: \mathbb{R}^{m_x \times m_y} \longrightarrow \mathbb{R}^{m_x m_y}$

$$e\,(U) = [U \quad \ldots \; U_{m_x} \quad U \quad \ldots \; U_{m_x} \quad \ldots \; U \;_{m_y} \; \ldots \; U_{m_x m_y}]^T.$$

e e e e eq (4) e e e

$$\Psi(f) := - \left\| (\mathcal{K}_x \otimes \mathcal{K}_y) \; e\,(f) - \; e\,(h_\delta) \right\| \qquad (\; . \;)$$
$$. . \quad e\,(f) \geq \; .$$

6.1. *MVM: FFT-ba ed e d*

e e e
e e ( ) e e e e e
e e e e e
e m e e e e e f m
e $\mathcal{K}_x$ $\mathcal{K}_y$ e e e e e e e e e
e e $\mathcal{K}$ ( ) e e ( ) e e
e ( ) e e
e e e e e e
e e e e

$$\mathcal{K} = \mathcal{F}^{\star}\,\Lambda\,\mathcal{F}$$

e e $\mathcal{F}$ e e e e Λ
e e e e $\mathcal{K}$ e e e e $\mathcal{K}$ e e
e e e ( ) e $\mathcal{K}$ e e
$\mathcal{K}x$ $\mathcal{F}^{\star}\Lambda\mathcal{F}x$
e e e e
( ) e e m e ( ) e e
O(m m) e

6.2. *MVM a e a : a e c a ac*

e e e e e e e
e e e e e e e
e e e e e e e
e e e

$$k(x\ y) = \frac{}{\pi\sigma} e \left(- - \left(\frac{x\ + y}{\sigma} \right) \right) \qquad (\ .4)$$

e e σ e e e e e σ e e f e e
e e e e e e e σ e e e e
e e e f
e e e e e e e e e e e k
( ) $\mathcal{K}$ e e e e e e e e e
$\mathcal{K} = A \otimes B$ $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e e A B e
e e e e e e e
e e e e e e e
e e e e e e
e e e e
e = e A B e e e e A
B e e e e e e e e $\mathcal{K}$ e
$C = A(\ :\ ) \otimes B(\ :\ )$ e e $\mathcal{K}$ e e

e e e

$$A = \begin{pmatrix} a & a & \cdots & \\ a & a & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & a \\ & & a & a \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b & b & \cdots & \\ b & b & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & b \\ & & b & b \end{pmatrix}$$

e $C := (C \quad C \quad C \quad C_4)^T = (a\ b \quad a\ b \quad a\ b \quad a\ b\ )^T$ e e e

$$y = \begin{pmatrix} \\ a\ Bx \\ \vdots \\ a\ Bx_{m-} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\ Bx \\ a\ Bx \\ \vdots \\ a\ Bx_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\ Bx \\ \vdots \\ a\ Bx_m \\ \ \end{pmatrix}$$

e e

$$x = \begin{pmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad x_i = \begin{pmatrix} x_i \\ x_i \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix}.$$

e

$$a\ Bx \ = \begin{pmatrix} \\ C\ x \\ \vdots \\ C\ x_{\ n-} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C\ x \\ C\ x \\ \vdots \\ C\ x_{\ n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C\ x \\ \vdots \\ C\ x_{\ n} \\ \ \end{pmatrix}$$

e e e e

Algorithm 2 (e)

= T r (

= 1 1 (

= 1 1 (

= (+ (+

(+ = (+ +

= 1 1 (

= r (

= (

= (

(=

= +

(=

= +

= e ( ) e
= ( ) e
e = e A B e e e e e
A B e e e e e e e e $\mathcal{K}$ e
$C = A(:) \otimes B(:)$ e e $\mathcal{K}$ e e
e e e
e 4mn e e e
e e e mn e e e
e e O(mn mn) e e 4mn mn
e e m n m = n = e

7. Numerical experiments

7.1. *1D I age e a b e*

e e e e e e e
e e e e e
eq

$$\int_a^b k(x-y)\,f(y)\ \ y = h(x) \qquad (\ . \ )$$

e e $k(x) = \ /\sqrt{\ \pi}\sigma$ e $\left(- \ / \ \left(x/\sigma\right) \ \right)$ σ e e f
e

$$f(y) = \ e \ \ (- \ (y- \ . \ ) \ ) + e \ \ (- \ (y+ \ . \ ) \ ). \qquad (\ . \ )$$

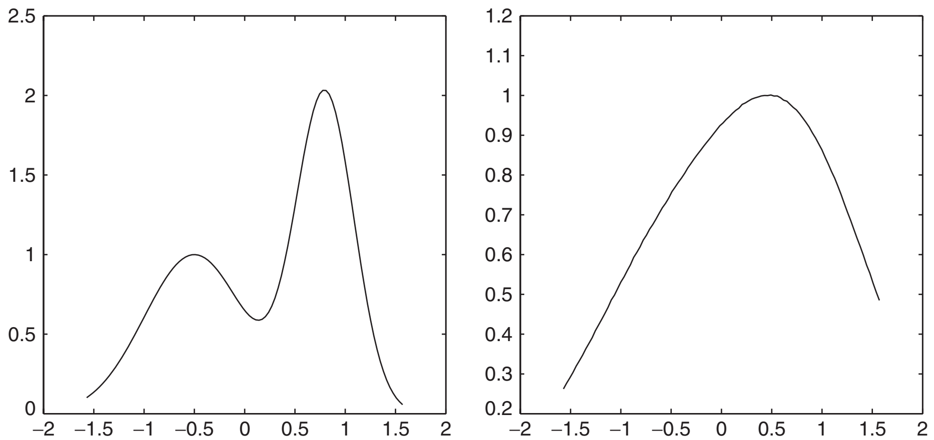
$a = -\pi/$ $b = \pi/$ $\sigma =$ e e h e
e $(m \times n)$ e $\mathcal{K}$ e e
( ) e e f e e e e $\{y_i\}_{i=}^{n}$
e e $[-\pi/ \ \ \pi/ \ ]$

$$h_i = \sum_{j=}^{n} \mathcal{K}_{ij} f(y_j). \qquad (\ . \ )$$

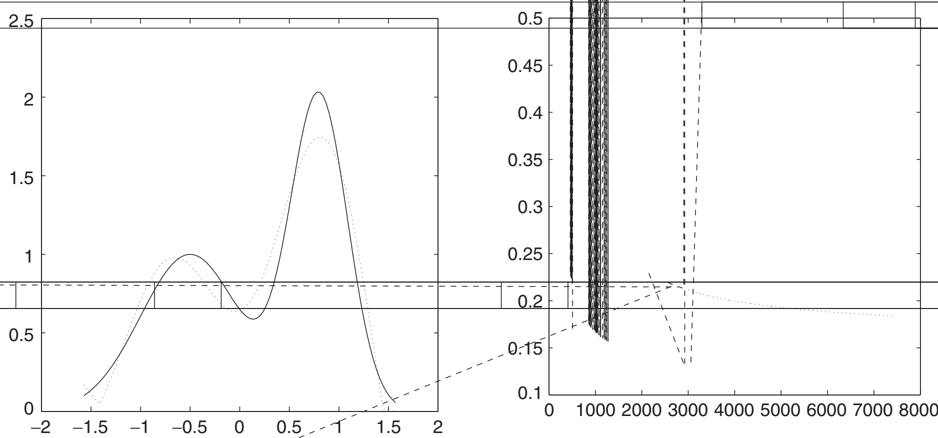
e e e e e e e e e e h

$$h_\delta = h + \hat{\delta} \cdot \qquad (\ \ e(h))$$

e e (e(h)) e e e e e e
h $\hat{\delta}$ e e e e



Left ... Right


2.5
2
1.5
1
0.5
0
−2 −1.5 −1 −0.5 0 0.5 1 1.5 2
0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0 1000 2000 3000 4000 5000 6000 7000 8000

e e e e e e $\delta = \hat{}$ . .

e	U e (e)	e e	e ee (e)	ε
	-	4	-	- e−
	- 4	4	-	- e−
	-	4	- 4	- e−
	-		-	- e−
	-		- 4	-

e e e e e e4 (right) e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e O e e e e e e e e e e e

7.2. *A e c age e a*

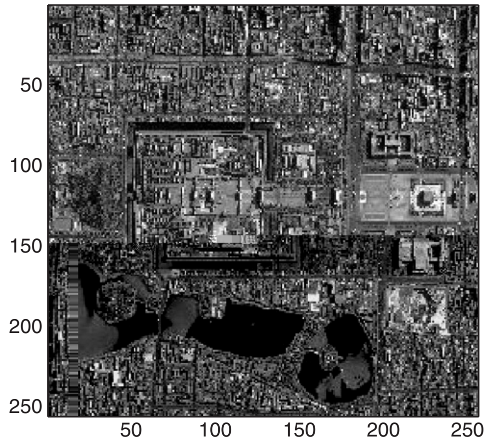
e e ee e e e e e e e ee

$$k(x-\xi\ y-\eta) = \frac{}{\pi\rho\bar{\rho}} e \left(-- \left(\frac{x-\xi}{\rho} \right) -- \left(\frac{y-\eta}{\bar{\rho}} \right) \right). \qquad (.4)$$

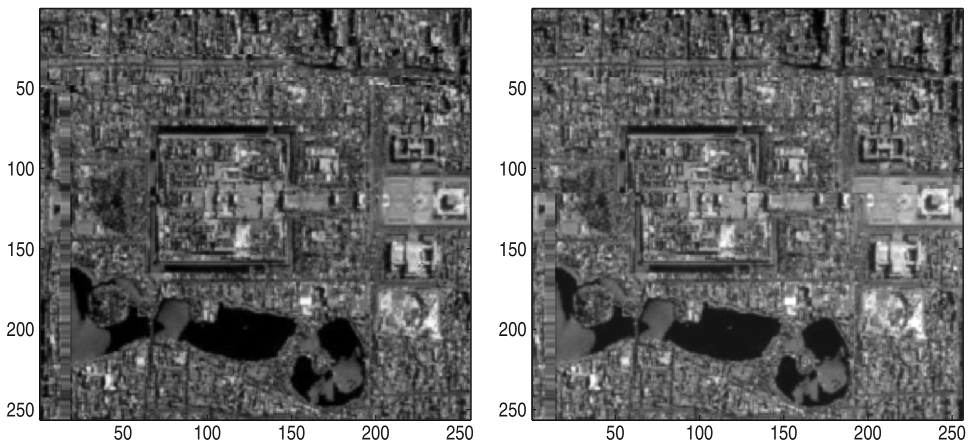
e e e $\rho = \bar{\rho} =$. e e n e e e ee e e

$$n = \delta \cdot \quad (N \quad)$$

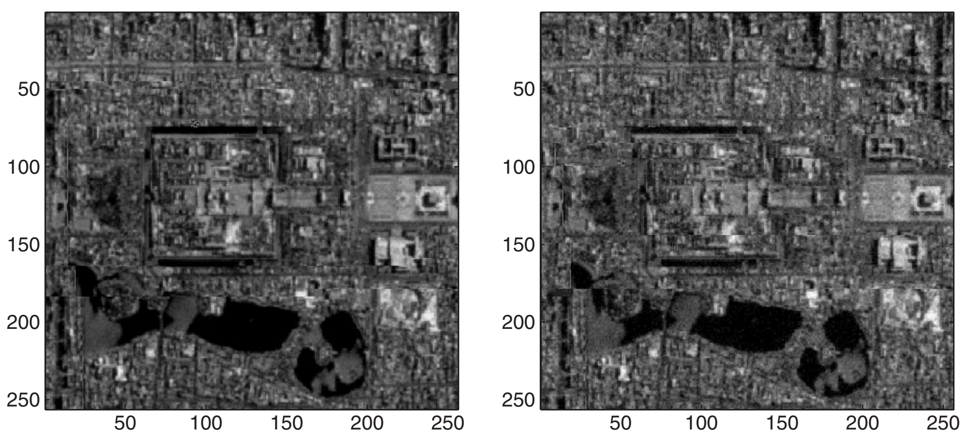
e e N e e e e (N) e e e e e (e’) e e e e e e e e e e e e e e e δ e e e $\delta = ($e e $/N)\|h\|$ e e e e $\in ($ $)$ e e e e e e e e e e e eq $\times$ e e e eq $\times$ eq e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e eq e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e e ee e e e e e (e) e e e e k $= 4$ e e



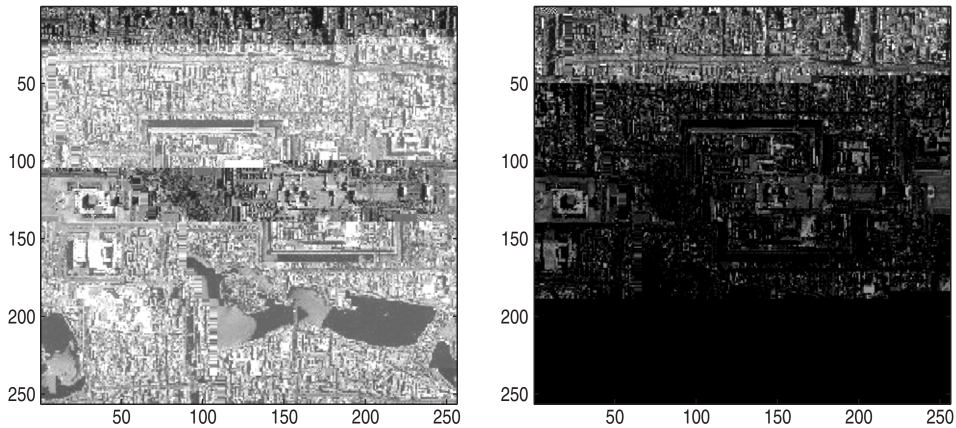
e _ e e



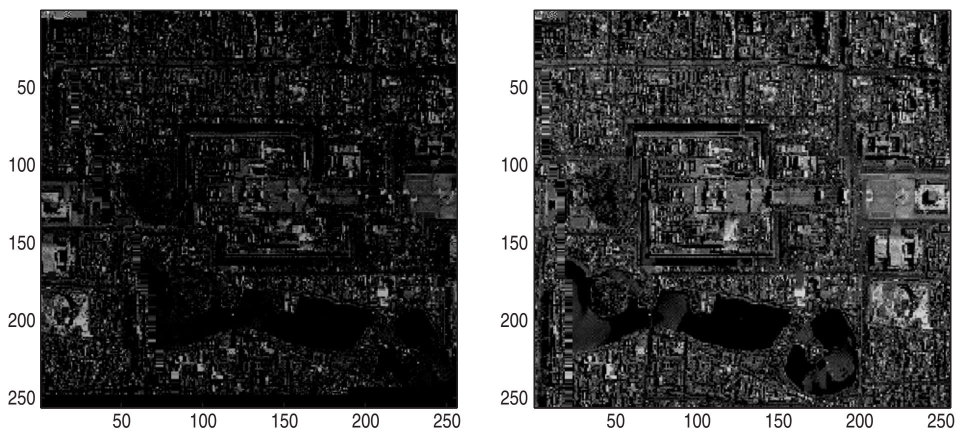
e _ e e e ee e e e Left e e = . Right e e = . _



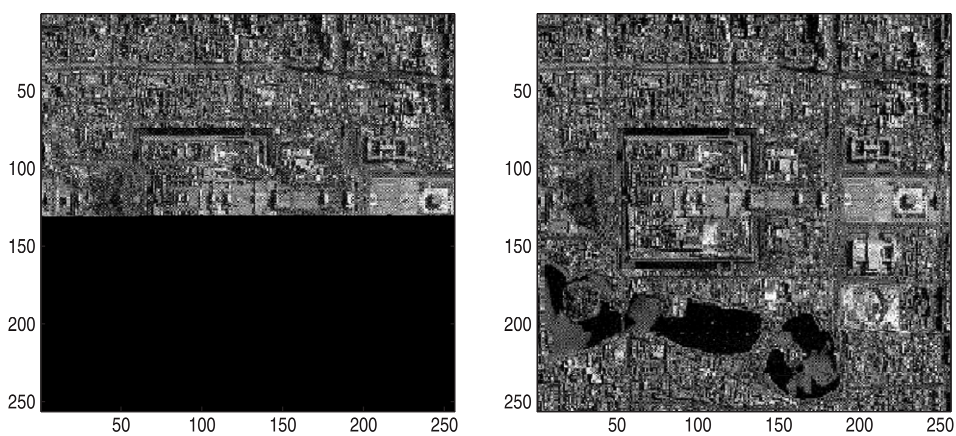
e _ e e e ee e e e Left e e = . Right e e = . _



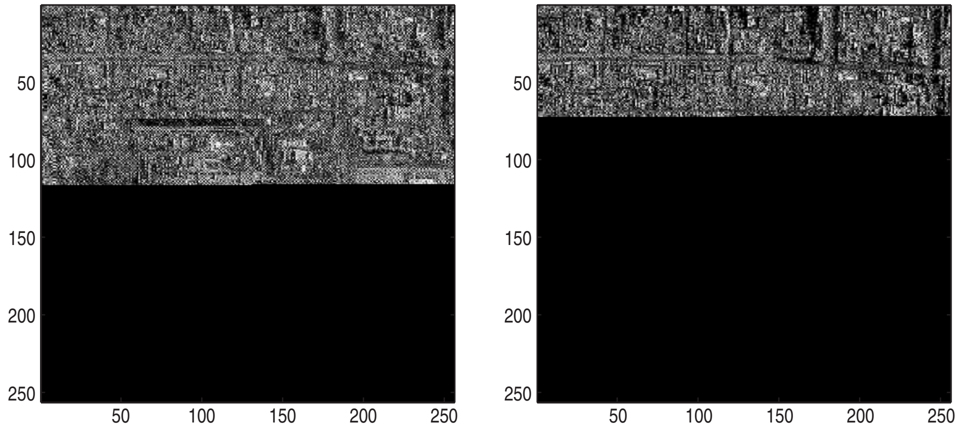
e e e e e (left) e (right) (e e = .)



e e e e e (left) e (right) (e e = .)



e e e e e (left) e (right) (e e = .)



e e e e (left) e (right) (e e = .)

e e e e k e e e e e
e e e e e e e e
e e e e e e k e e e
e e e O e e e e e e e
e

ee e e e e e e
e e e q e e e e
e e e e e e e e
e e (e e e) e e e e e
e e e e e e
e e e e e e
e e e e e e e e
e e e e e e e e e e e
e e ee e e e e e e
e e

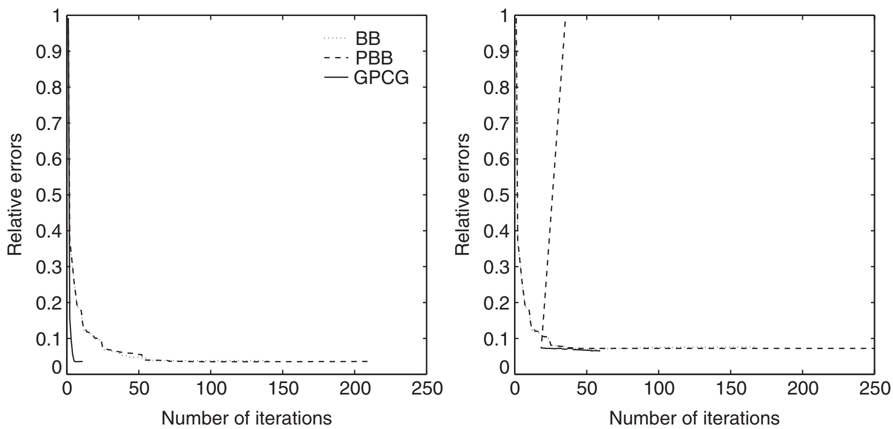
7.3. *D c e e*

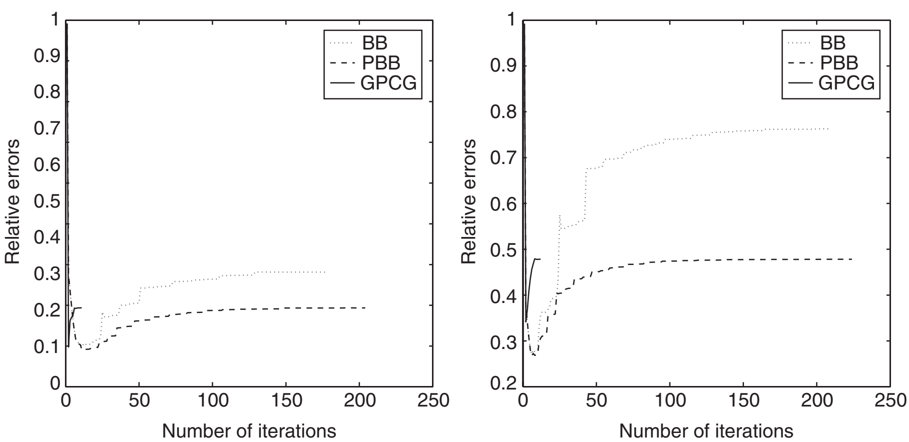
e e eq e e e e e e
e e e eq e e e e q e e
e e e e e e q e e e e
e e e ee e e e e
e e e e e e e e
e e e e e e e

e e e e e e e e
e e e e e e e e e
ee e e e e e
e e e e e e e e e
eq e e e e e e e e e
e

e - e e e ee e e e -

e	e e	e	e ee (e)	e e e (e e)
- -	4		-	-
- -			-	-
			-	-
- -		4	-	-
- -			-	-
		44	-	-
- -			- 4	-
- -	4		-	-
			-	-
- -		4	-	-
- -	4		- 4	-
			- 4	-





e - e ee ee e e (Left e e = . Right e e = .)

8. Conclusion and future works

Acknowledgements

References

SIAM Journal on Scientific Computing 25 4

IMA Journal of Numerical Analysis 8 4 4

Introduction to Inverse Problems in Imaging ( )

4 Y. U

Numerical Functional Analysis Optimization 13 4 4

Practical Methods of Optimization ( )

Digital Image Processing ( )

Q Linear Algebra and its Applications 316

Inverse Problems 12

Rank-deficient and Discrete Ill-posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion ( )

Y Q Q O + O Monthly Notices of Royal Astronomical Society 356

BIT 43

O SIAM Journal of Optimmization 1

4 et al ( ) Mathmatical Modeling 4

4 ( ) Advanced Signal Processing Algorithms

- e ee e e e e e eq SIAM Journal on Numerical Analysis 7
- O e e e e e e e e IMA Journal of Numerical Analysis 13
- e e e e e e e e e e e e e e e e
- O e e e e e e Physica D 60
- e Y Solutions of Ill-posed Problems (e Y e)
- e Y Numerical Methods for the Solution of Ill-posed Problems (e e e e)
- e e e e e e 4 Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods (e)
- e e e e e Mathematical Programming 77 4

4 e O e e e e IEEE Transactions On Image Processing 7 4

- e Computational Methods for Inverse Problems (e)
- Y Y Y e e e e e e Science in China A 45 4
- Y O e e e e e Science in China A 46
- Y Y e Y 4 e e e e e e e e e e International Journal of Remote Sensing 25 4 4 4
- e Y 4 e e e e e e e e e e Y Y ( ) Numerical Linear Algebra and Optimization (e e Y e e e)
- e Y e e e e Science in China A 48 4
- Y Y Y Y Numerical Methods for Inverse Problems (e e e e)
- Y Y Numerical Methods for Nonliear Programming (e e e)